



Confiabilidade interna e externa em Aplicações Geodésicas: Exemplo de uma Rede de Nivelamento

João Francisco Galera Monico, *UNESP Presidente Prudente*

Marcelo Tomio Matsuoka, *UFRGS Porto Alegre*

Luiz Fernando Sapucci, *UNESP Presidente Prudente*

Conteúdo [[esconder](#)]

1. Introdução
2. Testando a Qualidade do Ajustamento
 - 2.1 Teste Estatístico para Detecção de Erros (Teste Global do Ajustamento)
 - 2.2 Identificação do Problema do Ajustamento
 - 2.2.1 Teste estatístico para identificação das observações com erro grosseiro
 - 2.3 Adaptação
3. Confiabilidade Interna e Externa
 - 3.1 Confiabilidade Interna
 - 3.2 Confiabilidade Externa
 - 3.3 Razão Tendência-Ruído
4. Análise do MDB em uma Rede de Nivelamento
 - 4.1 Exemplo de Aplicação
 - 4.1.1 Erro Mínimo Detectável (MDB)
 - 4.1.2 Análise da influência do MDB nos parâmetros
5. Comentários finais
6. Referências bibliográficas

► [Resumo](#)

1. Introdução

Em Geodésia, tal como em muitas outras ciências, o ajustamento de observações tem por objetivo proporcionar uma solução única para problemas onde o número de observações é redundante e o sistema de equações a solucionar inconsistente, bem como a estimativa da precisão da solução adotada. A inconsistência do sistema de equações é devida às flutuações probabilísticas das observações e faz com que um determinado subconjunto de dados proporcione valores diferentes de outro subconjunto. A solução única nesses problemas é dada, em geral, pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) (GEMAEL, 1994).

As observações apresentam flutuações probabilísticas, pois, quando se repete a medida de uma grandeza, os vários valores não são idênticos, mas dispersos numa certa região ou intervalo. Essas flutuações, tradicionalmente, são classificadas como erros aleatórios. Além dos erros aleatórios, as observações podem estar contaminadas pelos erros sistemáticos e grosseiros (GEMAEL, 1994). Do ponto de vista estatístico, observações com erros grosseiros não podem ser consideradas como pertencentes à amostra, não podendo ser usadas com as outras observações. Desta forma, é importante dispor de técnicas para a detecção e identificação de erros grosseiros nas observações (TEUNISSEN, 2000), assunto este que será abordado neste artigo.

Existem duas razões principais para o uso de observações redundantes no ajustamento (TEUNISSEN, 2000). A primeira visa melhorar a acurácia dos resultados estimados. A segunda visa detectar a possível presença de erros (não aleatórios) nos modelos e/ou nas observações.

Dessa forma, a redundância de dados possibilita a aplicação de controle de qualidade nos resultados do ajustamento. Na prática, o controle de qualidade já se inicia na fase de planejamento. Os fatores considerados no controle de qualidade dividem-se em: economia, precisão e confiabilidade. A economia é um fator importante num projeto, pois expressa o custo total, envolvem operações de planejamento, execução, coleta de dados, processamento, etc. A precisão manifesta a dispersão dos resultados, sendo expressa pela Matriz Variância-Covariância (MVC) dos parâmetros. E a confiabilidade descreve a capacidade das observações em detectar erros nos modelos, bem como nas próprias observações, com certo nível de probabilidade. Trata-se nesse caso da confiabilidade interna. A influência de erros não detectados nos parâmetros permite que se avalie a confiabilidade externa.

O objetivo do presente artigo é apresentar uma revisão dos conceitos de confiabilidade interna e externa para fins de Geodésia, incluindo como exemplo uma rede de nivelamento, onde se mostrará a importância da inserção desses conceitos no planejamento de trabalhos geodésicos. Discute-se também a importância da introdução desses conceitos no contexto do ajustamento de observações.

2. Testando a Qualidade do Ajustamento

Os procedimentos dos testes aplicados no controle de qualidade dividem-se em três etapas, designadas de: detecção, identificação e adaptação (TEUNISSEN, 2000), as quais são apresentadas a seguir.

2.1 Teste Estatístico para Detecção de Erros (Teste Global do Ajustamento)

O teste estatístico para detecção de erros no modelo é conhecido como Teste Global do Ajustamento (GOM – *Global Overall Model*) (TEUNISSEN, 1998) ou também por teste Qui-quadrado (GEMAEL, 1994).

O fato de se escolher um valor qualquer para o fator de variância *a priori* (σ_0^2), também conhecido como variância da unidade de peso, não acarreta nenhum efeito no resultado do ajustamento. Essa escolha é feita antes do ajustamento para o cálculo da matriz dos pesos das observações (GEMAEL, 1994). Após o ajustamento, pode-se estimar um valor para o fator de variância em função dos resíduos, que é chamado de fator de variância *a posteriori* ($\hat{\sigma}_0^2$). A comparação entre os valores de σ_0^2 e $\hat{\sigma}_0^2$ pode ser um indicador da qualidade do ajustamento. Primeiramente, se houver discrepância entre σ_0^2 e ($\sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2$) aplica-se um teste de hipótese baseado na distribuição χ^2 para constatar se a discrepância é significativa a um certo nível de probabilidade (GEMAEL, 1994). Uma resposta afirmativa indica que existem problemas no ajustamento.

Desta forma, o teste estatístico χ^2 testa a hipótese nula:

$$H_0: \sigma_0^2 = \hat{\sigma}_0^2 \quad \text{contra} \quad H_a: \sigma_0^2 \neq \hat{\sigma}_0^2 \quad (1)$$

As hipóteses formuladas neste teste descrevem que, na hipótese nula (H_0), os fatores de variância *a posteriori* e *a priori* são estatisticamente iguais e na hipótese alternativa (H_a), o contrário. Para testar se a hipótese nula é rejeitada ou não, a um nível de significância α , compara-se o valor calculado por:

$$T = (\sigma_0^2 / \hat{\sigma}_0^2) (n - u) = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} \quad (2)$$

com o valor teórico da distribuição $\chi^2_{(n-u), 0}$. Nessa expressão tem-se:

- n : o número de observações;
- u : o número de parâmetros;
- V : o vetor ($n \times 1$) dos resíduos das observações e
- P : a matriz peso das observações ($P = \sigma_0^2 \sum_{1b}^{-1}$, onde é \sum_{1b}^{-1} a MVC das observações).

A hipótese nula “não” é rejeitada a um nível de significância α , se:

$$T < \chi^2_{(n-u, 0)} \quad (3)$$

Se isso não ocorrer, significa que há problemas no ajustamento. Assim, uma análise deve ser feita para verificar as possíveis razões ou circunstâncias que levaram à falha do teste, dentre as quais se deve verificar se o modelo funcional é adequado à realidade física; se o modelo estocástico é apropriado; se não existem erros grosseiros ou sistemáticos no processo de ajustamento; se o sistema não é mal condicionado e se não existe erro de cálculo no processo de ajustamento.

Um detalhe importante é que o teste detecta o problema, sem dar detalhes sobre qual tipo de problema possa ter ocorrido. Neste sentido, no próximo tópico será apresentado um teste para a identificação da observação com erro grosseiro (*outlier*).

2.2 Identificação do Problema do Ajustamento

Para abordar este tópico, assume-se que no caso em que o GOM falhar, qualquer especificação inadequada relacionada com o modelo funcional, bem como erros nos cálculos tenham sido identificados. Nesse artigo se detém com erros nas observações (*outliers*) e modelo estocástico.

2.2.1 Teste estatístico para identificação das observações com erro grosseiro

No processo de detecção de erros é comum comparecer o termo “*outlier*” como sinônimo de erro grosseiro. Um “*outlier*” é definido como um resíduo que contradiz algumas propriedades estatísticas. Isto possibilita definir uma estratégia de teste estatístico para detecção de *outliers*, dependendo, portanto, do nível de risco e distribuição de probabilidade assumidos, bem como do procedimento do teste (MONICO e SILVA, 2003). Independente da diferença entre a definição de erro grosseiro e *outliers*, assume-se que os *outliers* identificados são causados por erros grosseiros. As estratégias de identificação de *outliers* têm suas raízes nos trabalhos do ► Professor Baarda da Universidade Técnica de Delft na Holanda (BAARDA, 1968). A técnica desenvolvida por Baarda (1968) é denominada de *Data Snooping* e será apresentada a seguir.

Método de Baarda: Data snooping

Neste método utiliza-se a convenção de que somente um erro grosseiro (*outliers*) está presente no conjunto de observações. Desta forma, para identificar a *i*ésima observação com a presença de um *outlier*, o método *Data Snooping* baseia-se no cálculo da seguinte expressão (TEUNISSEN, 2000):

$$W_{b(i)} = \frac{c_{b(i)}^T P V}{\sqrt{c_{b(i)}^T P \sum_v P c_{b(i)}}} \quad (4)$$

onde P é a matriz dos pesos das observações, \sum_v é a matriz variância-covariância dos resíduos, e o vetor v é um vetor n -dimensional contendo um valor unitário na linha da *i*ésima observação a ser testada e zero nas demais, ou seja:

$$c_{b(i)}^T = [00 \dots 1 \dots 00] \quad (5)$$

1 2 i n-1 n

Em muitas aplicações práticas, a matriz variância-covariância das observações é diagonal, ou seja, não se considera ou não existe correlação entre as observações. Nestes casos, a equação (4) se reduz para (TEUNISSEN, 2000):

$$W_{1b(i)} = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \quad (6)$$

onde v_i é o resíduo da i ésima observação a ser testada e σ_{v_i} é o respectivo desvio-padrão desse resíduo.

A estatística $w_{1b(i)}$ tem como distribuição a raiz quadrada da distribuição F, com graus de liberdade do numerador igual a 1 e ∞ (infinito) no denominador. A raiz quadrada da distribuição F tem distribuição normal padrão, isto é, $\sqrt{F_{\alpha_0}(1, \infty)} = N_{\alpha_0/2}(0, 1)$. Então (TEUNISSEN, 2000):

$$w_{1b(i)} \sim N_{\alpha_0/2}(0, 1) \quad (7)$$

As hipóteses formuladas descrevem que na hipótese nula a i ésima observação não contém *outlier* ($\nabla_{1b(i)}$) e na hipótese alternativa o oposto. Dessa forma, testa-se:

$$H_0: \nabla_{1b(i)} = 0 \quad \text{contra} \quad H_a: \nabla_{1b(i)} \neq 0 \quad (8)$$

A hipótese básica não é rejeitada a um determinado nível de significância α_0 ($\alpha = 2 n \alpha_0$, desigualdade de Bonferroni (CHEN et al., 1987)) se (TEUNISSEN, 2000):

$$|w_{1b(i)}| \leq N_{\alpha_0/2}(0, 1) \quad (9)$$

Caso contrário, a i ésima observação é suspeita de possuir um *outlier*. Como se trata de um teste que verifica somente uma observação de cada vez, dependendo da magnitude do erro (*outlier* - $\nabla_{\lambda\beta(i)}$), após calcular o valor $w_{1b(i)}$ para todas as observações, pode ocorrer de mais do que um ou até todos excederem o valor crítico $N_{\alpha_0/2}(0, 1)$. Neste caso, a observação suspeita será aquela que possuir o maior valor para $w_{1b(i)}$. Logo, de uma forma geral, pode-se definir que a j ésima observação será suspeita de possuir um *outlier* se (TEUNISSEN, 2000):

$$|w_{1b(j)}| > N_{\alpha_0/2}(0, 1) \quad e \quad |w_{1b(i)}| \geq |w_{1b(j)}|, i = 1, \dots, n, i \neq j \quad (10)$$

2.3 Adaptação

Realizados os testes, com a finalidade de detectar e identificar as observações com erro, o próximo passo, caso tenha sido identificada alguma observação com erro (*outlier*), consiste em eliminar a sua influência dos resultados. Esta etapa é conhecida como adaptação e o procedimento para sua realização depende essencialmente se o processamento está sendo realizado em tempo real ou após a coleta dos dados (pós-processamento). Geralmente, no primeiro caso, ela consiste do cálculo da influência a ser retirada dos parâmetros, devido à observação eivada de erro. Caso contrário, pode-se realizar o re-processamento sem a utilização da observação eivada de erro. Nesse caso, retira-se a observação suspeita, o ajustamento é refeito e o teste deve ser repetido até que todas as observações suspeitas sejam identificadas.

Uma vez que os erros grosseiros ou *outliers* forem eliminados, é de se esperar que o ajustamento seja aceito pelo GOM. No entanto, salienta-se que, nos trabalhos com redes GPS, isso raramente ocorre. Isto porque, os resultados advindos do processamento GPS das sessões individuais são muito otimistas (MONICO e SILVA, 2003). Logo, deve-se reavaliar o modelo estocástico de cada uma das sessões. Ou seja, a MVC dos vetores GPS deve ser escalada, isto é, multiplicada por um determinado número. A experiência tem mostrado que esse escalar é de aproximadamente 10 (MONICO e PEREZ, 2002) para o caso do GPS. Mas, uma vez que todos os erros grosseiros estiverem eliminados, pode-se utilizar o fator de

variância *a posteriori* do ajustamento como sendo o escalar. Dessa forma, a nova matriz variância-covariância das observações (\sum_{Lb}) passa a ser:

$$\sum_{Lb} = \sigma_0^2 \sum_{Lb} \quad (11)$$

Procedimento similar ocorre no ajustamento de redes de nivelamento quando se utiliza como matriz peso o inverso da distância nivelada. Uma alternativa para esse problema será apresentada quando da exposição dos experimentos.

3. Confiabilidade Interna e Externa

3.1 Confiabilidade Interna

O erro tipo I, representado por α , é denominado de nível de significância de um teste de hipótese. Ele é definido como a probabilidade de rejeitar H_0 (hipótese nula) quando de fato H_0 é verdadeira. O erro tipo II, representado por β , se refere à probabilidade de aceitar H_0 quando na realidade H_0 é falsa, ou seja, H_a (hipótese alternativa) é verdadeira. Normalmente, o valor de α é definido e fixado, ficando como preocupação entender a probabilidade do erro tipo 2 de um dado teste de hipóteses. Em outras palavras, fica a preocupação de construir um teste com proteção razoável de β .

O poder do teste, representado por γ , é a probabilidade de aceitar H_0 quando realmente H_0 é verdadeira, ou seja, rejeitar H_a quando de fato ela é falsa. O poder do teste é dado por:

$$\gamma = 1 - \beta \quad (12)$$

Dessa forma, é importante calcular o tamanho de γ para verificar qual é a proteção do teste com relação ao erro tipo 2 (β). O poder do teste γ depende de três fatores (TEUNISSEN, 2000):

- do tamanho de α ;
- do número de graus de liberdade (q) do teste de hipóteses (no caso do *Data Snooping* $q=1$). Não se deve confundir “ q ” com o número de graus de liberdade ($n - u$) de um ajustamento. O termo “ q ”, no caso em questão, é o número de observações que estão sendo testadas no teste estatístico de hipóteses. É interessante comentar que o *"Data Snooping"* é um caso particular do teste de hipóteses geral, T_q , para $q = 1$. O teste global do modelo é o caso do T_q para $q = n - u$.
- do parâmetro de não centralidade λ da distribuição de probabilidade de H_a .

Na tabela 1 são mostrados alguns valores típicos de γ , dados em função de α , q e λ (TEUNISSEN, 2000).

Tabela 1 : Valores do poder de γ para diferentes valores de α , q e λ

| $\alpha = 0,01$ | $q = 1$ | $q = 7$ |
|-----------------|---------|---------|
| $\lambda = 2$ | 0,1227 | 0,0415 |
| $\lambda = 8$ | 0,5997 | 0,2710 |
| $\lambda = 18$ | 0,9522 | 0,7430 |
| $\alpha = 0,05$ | $q = 1$ | $q = 7$ |
| $\lambda = 2$ | 0,2930 | 0,1378 |
| $\lambda = 8$ | 0,8074 | 0,5017 |
| $\lambda = 18$ | 0,9888 | 0,8946 |
| $\alpha = 0,1$ | $q = 1$ | $q = 7$ |
| $\lambda = 2$ | 0,4099 | 0,2272 |
| $\lambda = 8$ | 0,8817 | 0,6287 |
| $\lambda = 18$ | 0,9953 | 0,9413 |

Da tabela 1 pode-se observar que o poder do teste γ : 1) aumenta com α , para q e λ fixos; 2) diminui com o aumento de q , para α e λ fixos e 3) aumenta com λ , para α e q fixos. Então, como γ depende de α , q e λ , existem três possibilidades para se construir um teste com proteção razoável contra o erro tipo 2. Pode-se, por exemplo, aumentar α . Porém, o aumento de α implica no aumento da probabilidade do erro tipo 1, o que não seria uma boa estratégia. Outro detalhe é que, usualmente, o tamanho de α é escolhido como um valor fixo. Então, uma outra possibilidade é o decréscimo de q . Mas, também, o valor de q já é estipulado para cada caso, sendo uma característica (propriedade) do teste (no *Data Snooping*, $q = 1$). Finalmente, deve-se então, aumentar o parâmetro de não centralidade λ . Mas como fazer isto? Tem-se, então, que estudar o comportamento de λ .

O valor de λ é dado por (TEUNISSEN, 2000):

$$\lambda = (C_b \nabla_b)^T \left[\sum_{l_b}^{-1} - \sum_{l_b}^{-1} A(A^T P A)^{-1} A^T \sum_{l_b}^{-1} \right] (C_b \nabla_b) \tag{13}$$

A equação (13) mostra que λ depende de:

- 1) \sum_{l_b} (a precisão das observações);
- 2) matriz A (geometria/configuração da rede) e
- 3) $C_b \nabla_b$ (modelo de erro – representa o afastamento entre H_0 e H_a).

Da equação (13) pode-se, então, concluir que melhorando a precisão das observações aumenta-se λ e, conseqüentemente, o poder do teste γ . Isto implica na escolha de métodos e equipamentos adequados para o processo de coleta de dados. Outra influência é a geometria da rede, devendo-se planejar a mais adequada, bem como a redundância das observações. Quanto ao valor de ∇_b , ele é incógnito, impossibilitando o cálculo de γ na prática. Para o caso do *Data Snooping*, ∇_{l_b} é o valor do *outlier* na iésima observação l_b e a matriz torna-se o vetor (ver equação 5).

Pode-se no entanto assumir um valor representativo para ∇_{l_b} e calcular qual seria o valor de λ e, enfim, o valor do poder do teste γ . Por exemplo, no caso do *Data Snooping*, poderia se estipular um erro mínimo ($\nabla_{l_b(i)}$) que se desejaria que o teste identificasse, e calcularia o poder do teste γ . Se a probabilidade γ for

menor que a esperada, é possível melhorar por meio de mudanças em (precisão das observações) e na matriz A (geometria/configuração). Isto mostra a importância do estudo da confiabilidade no processo de planejamento de um levantamento.

Porém, normalmente nas aplicações geodésicas, se está mais interessado na dimensão do menor erro ∇_{lb} que pode ser detectado com uma probabilidade estipulada γ , do que no poder do teste propriamente dito. Na prática assume-se um valor de referência para o poder do teste, $\gamma = \gamma_0$ ($\gamma_0 = 50\%$, 70% , mais usual: 80%), e junto com α e q obtém-se $\lambda = \lambda_0$, que simbolicamente é dado por:

$$\lambda_0 = \lambda(\alpha, q, \gamma = \gamma_0) \quad (14)$$

Este valor pode ser encontrado em tabela (como na tabela 1 – mais detalhes em Teunissen (2000)). Usualmente, se adota o valor de $\lambda_0 = 17,075$, que está relacionado a $\alpha = 5\%$ e $\gamma = \gamma_0 = 80\%$. A partir de $\lambda = \lambda_0$ pode-se calcular o modelo de erro ∇_{lb} . Isto é obtido a partir da solução quadrática (TEUNISSEN, 2000):

$$\lambda_0 = \nabla_{lb}^T C_{lb}^T \sum_{Lb}^{-1} \sum_v \sum_{Lb}^{-1} C_{lb} \nabla_{lb} \quad (15)$$

para ∇_{lb} . Uma vez que ∇_{lb} é conhecido, o modelo de erro é calculado por:

$$\nabla_{Lb} = C_{lb} \nabla_{lb} \quad (16)$$

O vetor ∇_{Lb} é dito descrever a confiabilidade interna de H_0 com respeito a H_a . Em outras palavras, pode-se afirmar que a “*confiabilidade interna representa a dimensão do modelo de erro que pode ser detectada com uma probabilidade $\gamma = \gamma_0$* ”. Mas como calcular o tamanho de ∇_{lb} pela equação (15)? Infelizmente, a equação (15) não possui solução única para ∇_{lb} . Considerando o caso do *Data Snooping*, a matriz reduz-se a um vetor $c_{lb(i)}$ de dimensão $(n \times 1)$, e o vetor ∇_{lb} de dimensão $(q \times 1)$ reduz-se a um escalar $\nabla_{lb(i)}$ (ver equação 5). Então, para o caso do *Data Snooping*, a equação (15) pode ser escrita como (TEUNISSEN, 2000):

$$\lambda_0 = c_{lb(i)}^T \sum_{Lb}^{-1} \sum_v \sum_{Lb}^{-1} c_{lb(i)} (\nabla_{lb(i)})^2 \quad (17)$$

Logo, a solução em termos de $\nabla_{lb(i)}$ é dada por (TEUNISSEN, 2000):

$$|\nabla_{lb(i)}| = \sqrt{\frac{\lambda_0}{c_{lb(i)}^T \sum_{Lb}^{-1} \sum_v \sum_{Lb}^{-1} c_{lb(i)}}} \quad (18)$$

O escalar $|\nabla_{lb(i)}|$ é o menor erro que pode ser detectado na *i*-ésima observação usando o teste *Data Snooping*, com probabilidade $\gamma = \gamma_0$. Desta forma, a equação (18) mostra que o Menor Erro Detectável (MDB – *Minimal Detectable Bias*) depende, primeiramente, da escolha de $\gamma = \gamma_0$, α e q . Para o caso do *Data Snooping* o nível de significância é α_0 e $q = 1$. O valor de α_0 do *Data Snooping* deve estar relacionado adequadamente com o α do GOM ($q = n - u$). Esta relação é mostrada pelo parâmetro de não centralidade λ_0 que deve ser o mesmo valor tanto para o *Data Snooping* quanto para o GOM. Desta forma, tem-se a seguinte relação:

$$\lambda_0 = \lambda(\alpha, q = n - u, \gamma = \gamma_0) = \lambda(\alpha_0, q = 1, \gamma = \gamma_0) \quad (19)$$

Teste Global Data Snooping

Ou seja, adotado um valor para α_0 obtém-se o valor de λ_0 . Em seguida, obtém-se o valor de α , tal que o valor de λ_0 seja mantido o mesmo. Ou vice-versa, iniciando-se com o valor de α . Uma relação algébrica aproximada entre α e α_0 é $\alpha \cong 2 n \alpha_0$ (CHEN et al., 1987):

Outra dependência da equação (18) de $\nabla_{l(i)}$ é quanto à precisão das observações (contidas em \sum_{LB}^{-1} e \sum_v) e a geometria da rede (matriz A – contida em \sum_v). Em muitas aplicações práticas, a MVC das observações é diagonal. Nestes casos, a equação (18) pode ser simplificada para:

$$|\nabla_{l(i)}| = \sigma_{l(i)} \sqrt{\frac{\lambda_0}{[1 - (\sigma_{l(i)}^2 / \sigma_{l(i)}^2)]}} \quad (20)$$

onde:

- $\sigma_{l(i)}^2$ = é a precisão da iésima observação e
- $\sigma_{l(i)}^2$ = é a precisão da iésima observação ajustada.

A equação (20) mostra que o menor erro detectável ($|\nabla_{l(i)}|$) na iésima observação é maior se o valor de $\sigma_{l(i)}^2$ for próximo de $\sigma_{l(i)}^2$, e que é menor quanto menor for o valor de $\sigma_{l(i)}^2$ em comparação a $\sigma_{l(i)}^2$. Quanto menor o valor de $|\nabla_{l(i)}|$ melhor é a confiabilidade interna do modelo, ou seja, da rede.

A equação (20) só pode ser calculada após o ajustamento ter sido realizado. Em muitos casos, antes mesmo do levantamento de campo ser realizado, se tem o conhecimento *a priori* de como é a configuração da rede de pontos a ser levantada e também se tem uma noção de como será a precisão das observações, por meio do conhecimento dos equipamentos que poderão ser usados, dos métodos, entre outros fatores. Dessa forma, seria importante no processo de planejamento que se tivesse condições de se calcular um valor esperado para $|\nabla_{l(i)}|$ antes mesmo que o levantamento fosse executado. Isto possibilitaria analisar a confiabilidade interna da rede a priori. Em Teunissen (2000) é mostrado um desenvolvimento da equação (20) de tal forma que se pode obter a confiabilidade interna média para a iésima observação, antes do levantamento de campo ser realizado. O termo adimensional da equação (20):

$$r_{(i)} = 1 - (\sigma_{l(i)}^2 / \sigma_{l(i)}^2) \quad (21)$$

denominado agora de $r_{(i)}$ é conhecido como sendo o iésimo número de redundância local. Note que como $0 \leq \sigma_{l(i)}^2 \leq \sigma_{l(i)}^2$, logo, o número de redundância local $r_{(i)}$ sempre está compreendido no seguinte intervalo de $0 \leq r_{(i)} \leq 1$. A razão pela qual $r_{(i)}$ é chamado de iésimo número de redundância local é devida a seguinte propriedade:

$$\sum_{i=1}^n r_{(i)} = \sum_{i=1}^n 1 - (\sigma_{l(i)}^2 / \sigma_{l(i)}^2) = n - u \quad (22)$$

onde, como já visto, n é o número de observações e u é o número de parâmetros. Ou seja, a soma de todos os números de redundância local é igual ao número de observações redundantes no modelo ($n - u$). Da equação (22) pode-se, então, obter um valor médio da seguinte forma:

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^n r_{(i)}}{n} = \frac{n-u}{n} \quad (23)$$

Logo, substituindo na equação (20) o iésimo número de redundância local por (redundância média), pode-se obter uma aproximação para:

$$|\nabla_{Lb(i)}| \cong \sigma_{B(i)} \sqrt{\frac{\lambda_0}{(n-u)/n}} \quad (24)$$

A equação (24) mostra que, conhecendo-se *a priori* ou pelo menos tendo uma noção da precisão da iésima observação, bem como do número de observações e de parâmetros (configuração da rede), pode-se calcular um valor aproximado para o MDB com uma probabilidade $\gamma = \gamma_0$. Isto pode ser mais um fator a ser analisado na etapa de planejamento. Se os valores de $\nabla_{Lb(i)}$, não forem os que se esperavam, pode-se adotar as estratégias necessárias, que por exemplo, vão desde a escolha de outros equipamentos até a mudança da estrutura/configuração da rede planejada. É claro que outros fatores podem ser modificados, variando para cada caso.

3.2 Confiabilidade Externa

Determinado ∇_b , a confiabilidade interna é descrita pelo vetor (nx1):

$$\nabla_{Lb} = C_B \nabla_b \quad (25)$$

No caso do *Data Snooping*, determinado o menor erro detectável ($\nabla_{Lb(i)}$) na iésima observação, a equação (25) reduz-se para:

$$\nabla_{Lb(i)} = C_{B(i)} |\nabla_{Lb(i)}| \quad (26)$$

onde: $C_{B(i)}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & n-1 \end{bmatrix}$

Definido a confiabilidade interna, a próxima etapa é verificar a confiabilidade externa. Esta é definida como sendo a "influência do modelo de erro ($\nabla_{Lb} = \nabla_b$) sobre os resultados finais de um ajustamento". Por exemplo, para o caso do *Data Snooping*, a confiabilidade externa mostra a influência nos parâmetros do da iésima observação. Ou seja, é importante saber a influência nos parâmetros de um possível erro máximo não detectado. Enfim, a confiabilidade externa é obtida utilizando o mesmo estimador dos mínimos quadrados, apenas substituindo o vetor L pelo MDB (∇_{Lb}). Logo, a confiabilidade externa é dada por (TEUNISSEN, 2000):

$$\nabla X = (A^T P A)^{-1} [A^T P \nabla_{Lb}] \quad (27)$$

Então, ∇X é o vetor de dimensão (ux1) que descreve o erro esperado nos parâmetros causados pelo possível modelo de erro (∇_{Lb}) não detectado no teste estatístico. Uma abordagem mais ampla pode ser encontrada em Teunissen (2000).

3.3 Razão Tendência-Ruído

Em muitos casos, dependendo de como é o modelo de erros adotado, a avaliação dos valores da confiabilidade interna e externa não é uma tarefa prática. Com o objetivo de tentar simplificar o processo de análise procura-se substituir a medida vetorial ∇_{Lb} por um valor escalar. Se considerar ∇_{Lb} como uma possível tendência não detectada pelo teste e a MVC como uma descrição do ruído nas observações, pode-se obter um escalar, denominado de tendência-ruído, que pode ser utilizado para avaliar o vetor ∇_{Lb} . A razão tendência-ruído (λ_{Lb}) é dado por (TEUNISSEN, 2000):

$$\lambda_{Lb} = \nabla_{Lb}^T \sum_{Lb}^{-1} \nabla_{Lb} \quad (28)$$

Quando a matriz é diagonal, a equação (28) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\lambda_{Lb(i)} = \frac{\lambda_0}{1 - (\sigma_{Lb(i)}^2 / \sigma_{Lb_0}^2)} \quad (29)$$

No caso do *Data Snooping*, o número de elementos existentes nos vetores de ∇_{Lb} a ser avaliado é pequeno, pois apenas um dos elementos é diferente de zero, que é o MDB da observação testada. Desta forma, o fator tendência-ruído para a confiabilidade interna no caso do *Data Snooping* não é uma estratégia interessante, pois para cada MDB se tem um escalar λ_{Lb} . Para a confiabilidade interna o fator tendência-ruído é mais interessante para modelo de erros mais complexos. No entanto, para a avaliação da confiabilidade externa, mesmo para o *Data Snooping*, o cálculo do escalar tendência-ruído para os parâmetros (λ_x) é uma estratégia prática que pode ser calculado para simplificar a análise. Isto porque um escalar λ_x representa o vetor da confiabilidade externa ∇_X . O fator tendência-ruído dos parâmetros pode ser obtido a partir dos valores do λ_{Lb} e do parâmetro de não-centralidade (λ_0) da seguinte forma (TEUNISSEN, 2000):

$$\lambda_x = \lambda_{Lb} - \lambda_0 \quad (30)$$

4. Análise do MDB em uma Rede de Nivelamento

A rede de nivelamento utilizada nesse trabalho é apresentada em Gemael (1994 p. 147). Ela é composta por 16 linhas de nivelamento, com 11 altitudes a serem ajustadas (Figura 1). Para avaliar a influência da precisão das observações nos valores do MDB, o controle de qualidade será realizado simulando diferentes precisões para as observações (desníveis). A precisão de cada observação foi calculada com base em 4 equações: $2mm\sqrt{Dist}$; $6mm\sqrt{Dist}$; $8mm\sqrt{Dist}$; e $10mm\sqrt{Dist}$; , onde *Dist* é a distância em quilômetros da linha de nivelamento. Ou seja, simulou-se 4 situações.

No que se refere a geometria da rede, concentrar-se-á apenas com a configuração original aqui denominada de situação A. Futuramente, em novos experimentos pretende-se analisar a influência de diferentes configurações da rede nos valores de confiabilidade.

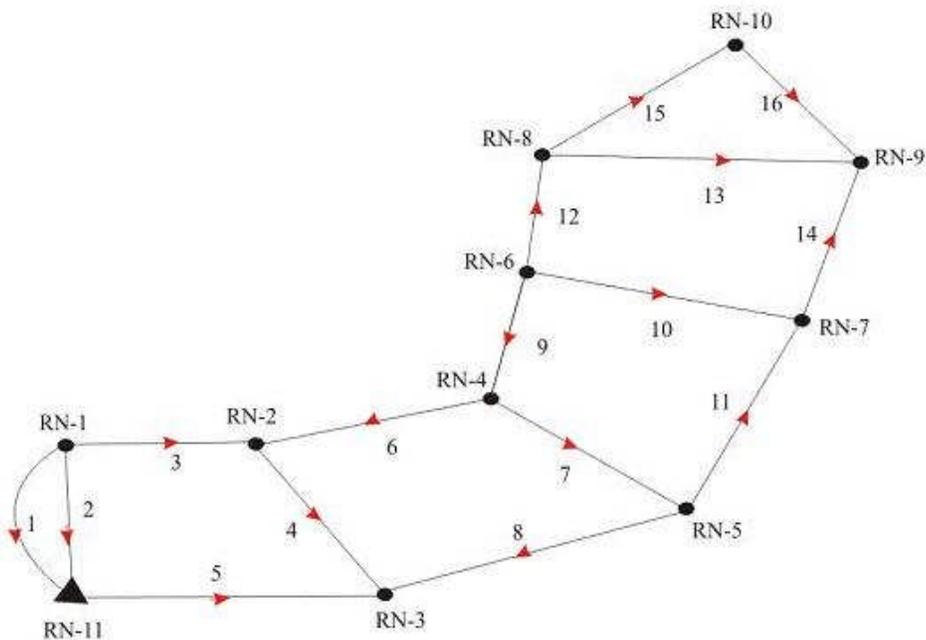


Figura 1 : Esquema da geometria da rede na situação A (adaptada de Gemael, 1994).

Na tabela 2 é apresentada o valor das observações, contendo os valores dos desníveis de cada linha e a respectiva distância, além das informações de injunções de altitude. Pode-se notar que a RN-11 será injuncionada de forma quase que absoluta. As observações, assim como os parâmetros são identificadas para que possam ser referenciados posteriormente na análise dos resultados. Com essa configuração o número de observações é 17, e o número de parâmetros incógnitos é 11 (incluindo a injunção), o que resulta em 6 graus de liberdade.

Tabela 2 : Relação das observações dos desníveis com a respectiva distância das linhas de nivelamento e uma injunção absoluta.

| Observação | Linha de nivelamento | | Desnível (m) | Distância (km) | Injunção | |
|------------|----------------------|----------|-----------------|-------------------|-------------|---------------|
| | RN Inicial | RN Final | | | Altitude(m) | Desvio Padrão |
| 1 | 1 | 11 | 106.2625 | 72 | | |
| 2 | 1 | 11 | 106.2602 | 40 | | |
| 3 | 1 | 2 | 175.9286 | 44 | | |
| 4 | 2 | 3 | 4.0472 | 20 | | |
| 5 | 3 | 11 | 73.6905 | 61 | | |
| 6 | 2 | 4 | 36.3277 | 26 | | |
| 7 | 4 | 5 | 29.9320 | 59 | | |
| 8 | 3 | 5 | 10.4241 | 60 | | |
| 9 | 4 | 6 | 138.6889 | 83 | | |
| 10 | 6 | 7 | 181.0665 | 26 | | |
| 11 | 5 | 7 | 12.470 | 74 | | |
| 12 | 6 | 8 | 162.230 | 248 | | |
| 13 | 8 | 9 | 23.8215 | 111 | | |
| 14 | 7 | 9 | 5.0135 | 67 | | |
| 15 | 8 | 10 | 22.8896 | 108 | | |
| 16 | 9 | 10 | 0.9243 | 147 | | |
| 17 | 11 | 0 | | | 1000.00 | 0.0000000001 |

4.1 Exemplo de Aplicação

Para esta ocasião, foi realizada uma análise do menor erro detectável (MDB) nas observações, bem como uma análise na influência do MDB nos parâmetros ajustados.

4.1.1 Erro Mínimo Detectável (MDB)

A figura 2 mostra os valores do MDB considerando as 4 simulações de precisão atribuídas ao processo de nivelamento, considerando os valores recomendados ($\alpha = 1\%$ e $\beta = 80\%$). Pode-se notar, como esperado, a dependência direta do nível de precisão das observações. Para o caso em que a precisão é $2\text{mm}\sqrt{\text{Dist}}$, o MDB atingiu 0,18 m para a maior linha de nivelamento, a qual é da ordem de 248 km, proporcionando para essa linha precisão (1 sigma) de 0,031 m (observação 12). Logo, o MDB correspondente foi da ordem de seis (6) vezes a precisão da linha nivelada. Para a linha mais curta (20 km), tem-se MDB da ordem de 0,07 m (observação 4), com precisão da linha nivelada de 0,009 m. Desta forma, nessa situação o MDB é da ordem de 8 vezes a precisão da linha nivelada. Para os demais casos, a relação entre precisão e MDB fica entre os dois valores apresentados (6 e 8 vezes).

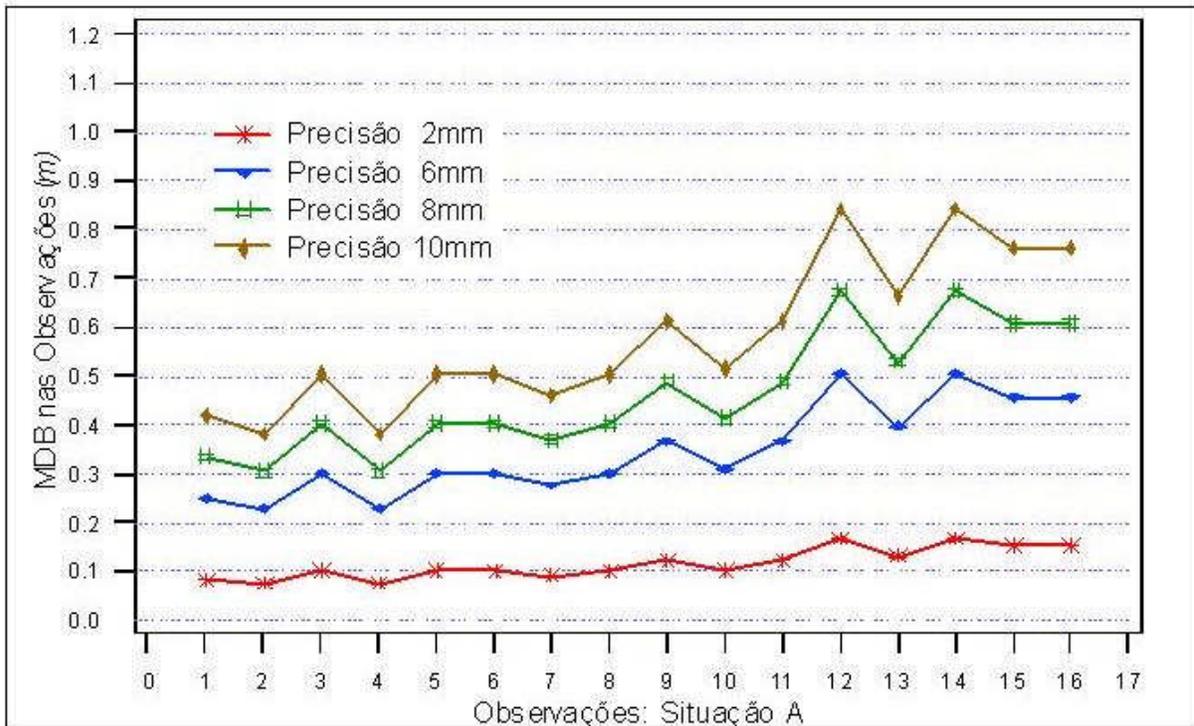


Figura 2 : MDB em cada uma das observações para diferentes valores de precisão.

4.1.2 Análise da influência do MDB nos parâmetros

A segunda análise realizada diz respeito à confiabilidade externa, que é a influência dos valores do MDB nos parâmetros ajustados. Uma análise da confiabilidade externa pode ser realizada aglomerando em um mesmo vetor todos os valores do MDB obtidos para as diferentes observações para o caso do *Data Snooping*. Nesse caso, o vetor dos valores do MDB (∇_{LB}) resultante é um vetor “cheio”, contendo os valores de todos os MDBs de cada observação. O vetor ∇X , nesse caso, contém a influência nos parâmetros gerada pela presença do MDB em todas as observações simultaneamente. Explorando, então, o fato da influência da presença do MDB em todas as observações simultaneamente representar uma média, a figura 3 apresentam tais influências ao considerar as diferentes precisões observacionais simuladas.

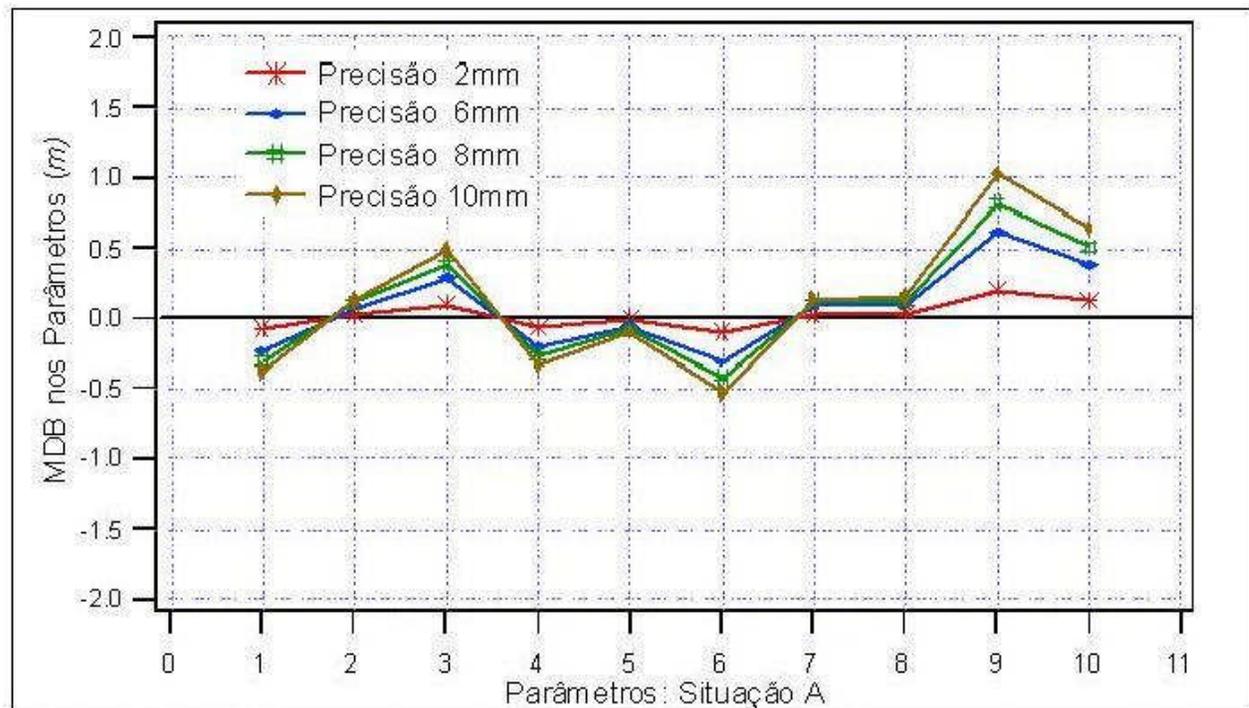


Figura 3 : Influência do MDB presente em todas as observações simultaneamente nos parâmetros ajustados.

Como é de se esperar, pode-se verificar na figura 3 que os valores da confiabilidade externa são maiores quanto pior a precisão da observação considerada, pois, como já visto os valores do MDB nessas circunstâncias também são maiores.

Na figura 3 nota-se que as maiores influências foram geradas no parâmetro 9 nas diferentes precisões observacionais consideradas, seguidas pelas verificadas no parâmetro 10. Destaque deve ser dado para a diferença das influências geradas nos casos em que a precisão utilizada era de 2 mm com relação à de 10 mm, pois chega a ser 10 vezes maior para o último caso, revelando a importância da precisão observacional na confiabilidade externa.

5. Comentários finais

O principal foco deste artigo foi apresentar dentro do contexto do Ajustamento de Observações o tema confiabilidade. Neste sentido, a teoria sobre confiabilidade (interna e externa) e um simples exemplo de aplicação para o caso de uma rede de nivelamento foram apresentados.

Pretendeu-se mostrar que a confiabilidade também é uma etapa a ser considerada dentro da análise da qualidade de um ajustamento. Isto porque, na prática, a comunidade, em sua grande parte, tem familiaridade na etapa de análise apenas com os tão conhecidos testes estatísticos (Global e Data Snooping). Como visto, é importante a inclusão da confiabilidade, pois, ela está ligada com os testes estatísticos. Explicitando de maneira simples, a confiabilidade mostra a potencialidade dos testes estatísticos. Por exemplo, é importante que se realize o teste Data snooping em um dado ajustamento; porém, é também importante que se calcule a confiabilidade, ou seja, o menor erro detectável pelo Data snooping em cada observação, bem como a influência desse erro nos parâmetros. Essa análise é de fundamental importância em redes estabelecidas para detecção de deformações.

Nesta oportunidade, foi apresentado um exemplo da confiabilidade interna e externa para uma rede de nivelamento, considerando diversos casos de precisão para as observações. Ainda, em futuros experimentos, pretende-se mostrar a influência da configuração da rede na confiabilidade, bem como, mostrar algo interessante que é o cálculo aproximado da confiabilidade na fase de planejamento, ou seja, antes mesmo de realizar as medições de campo.

6. Referências bibliográficas

- **Baarda,W.:** *A testing procedure for use in geodetic networks*, Netherlands Geodetic Commission – Publication on Geodesy – News Series, Delft, v.2, n.5, 1968
- **Chen,Y.Q.; Kavouras,M.; Chrzanowski,A.:** *A strategy for detection of outlying observations in measurements of high precision*, The Canadian Surveyor, Ottawa, v.41, n.4, p.529-540, winter 1987
- **Gemael,C.:** *Introdução ao Ajustamento de observações: Aplicações Geodésicas*, 319p., Editora da UFPR, Curitiba 1994
- **Monico,J.F.G.; Silva,E.F.:** *Controle de Qualidade em Levantamentos no Contexto da Lei 10.267*, In: Anais do III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas – CD-ROM, 06 a 09 de maio, Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba 2003
- **Monico,J.F.G.; Perez,J.A.S.:** *Integration of a Regional GPS Network within ITRF using Precise Point Positioning*, In: Adam,J.; Schwars,K.P. (org.), *Vistas for Geodesy in the new millennium: IAG Scientific Assembly*, Berkim, 2001, v.125, p.66-71
- **Teunissen,P.J.G.:** *Testing Theory: an introduction*, Editora: Delft University Press, Delft/Holanda 2000
- **Teunissen,P.J.G.:** *Quality Control and GPS*, In: Teunissen,P.J.G.; Kleusberg,A.: *GPS for Geodesy*, p. 271-318, 2.ed., Springer Verlag, 1998

