CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

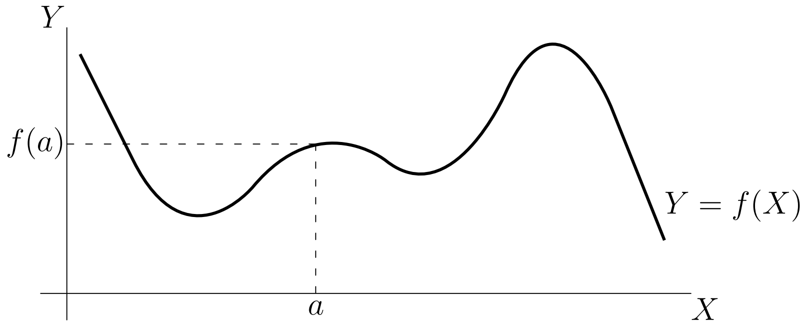
Resumo. Nesta aula, discutiremos a noção de continuidade que, juntamente com a diferenciação, possibilitarão a solução de problemas de otimização.

1. Funções contínuas

Uma função $f(X)$ é contínua para $X = a$ quando, em torno de a, traça-se o gráfico de $f(X)$ sem tirar o lápis do papel. Neste caso, quando X se aproxima de a, os valores de $f(X)$ necessariamente têm de se aproximar de $f(a)$. Portanto, uma função $f(X)$ é **contínua em** $X = a$ quando

$$\lim_{X\to a} f(X) = f(a)$$

O gráfico abaixo ilustra esta situação:



O próximo resultado é muito importante porque nos permite decidir que várias funções que estamos considerando ao longo deste curso são contínuas para um determinado valor da variável.

Teorema 1. *Se $f'(a)$ existe, então $f(X)$ é contínua para $X = a$.*

Por definição, temos que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Este limite tem de ser do "tipo $\frac{0}{0}$" porque, quando h se aproxima de 0, o denominador tende a 0 e conseqüentemente o numerador tem de aproximar de 0, já que o limite existe. Portanto,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

Fazendo $X = a + h$, podemos reescrever este limite como

$$\lim_{X\to a} f(X) = f(a)$$

Logo $f(X)$ é contínua para $X = a$ e o teorema segue.

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Uma função $f(X)$ é dita **contínua** quando for contínua para todo X que pertence ao seu domínio de definição. Pelo teorema anterior, se a função $f(X)$ possua derivada para todo X pertencente ao seu domínio de definição, então $f(X)$ é contínua. Como exemplo de funções contínuas temos:

- As funções polinomias.
- As funções logaritmicas.
- As funções exponenciais.
- As funções trigonométricas.
- As funções trigonométricas inversas.

Pode parecer um pouco estranho que a função tangente, por exemplo, seja contínua porque necessitamos tirar o lápis do papel para desenhar o seu gráfico. De fato isto ocorre, mas a descontinuidade não é da função e sim do seu domínio de definição.

As funções contínuas são importantes porque possuem muitas propriedades interessantes como, por exemplo:

Teorema 2. *Quando $f(X)$ for uma função contínua para todo X pertencente ao intervalo fechado $[a,b]$, temos que:*

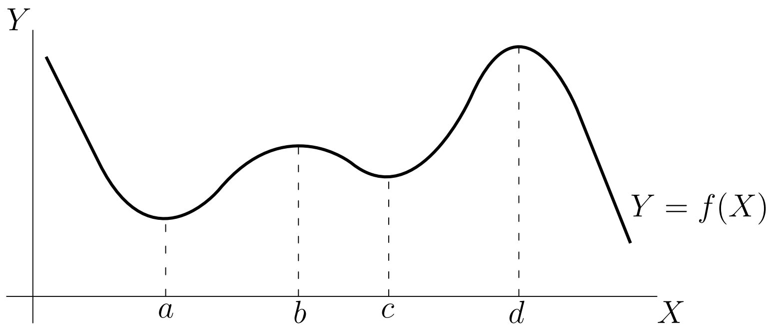
(i) *Exsitem m e M no intervalo $[a,b]$ tais que $f(m) \leq f(X) \leq f(M)$ para todo X no intervalo $[a,b]$. Isto é, $f(X)$ assume um valor mínimo e um valor máximo quando X percorre o intervalo $[a,b]$. Vários problemas de otimização podem ser reduzidos a encontrar um valor mínimo ou máximo de uma função contínua em um intervalo fechado.*

(ii) *Se c está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe d no intervalo $[a,b]$ tal que $c = f(d)$. Este resultado é conhecido como o teorema do valor intermediário.*

2. Máximos e mínimos locais

Diremos que a função $f(X)$ assume um **máximo local** para $X = a$ quando existe um intervalo aberto I contendo a tal que $f(X) \leq f(a)$ para todo X pertencente ao intervalo I. Isto é, em torno de $X = a$, a função $f(X)$ assume o maior valor para $X = a$. Diremos que $X = a$ é um **ponto de máximo local** de $f(X)$.

De maneira análoga, uma função $f(X)$ assume um **mínimo local** para $X = a$ quando existe um intervalo aberto I contendo a tal que $f(X) \geq f(a)$ para todo X pertencente ao intervalo I. Define-se ponto de mínimo local similarmente.



Na figura anterior, a função $f(X)$ assume mínimos locais para $X = a$ e $X = c$ e assume máximos locais para $X = b$ e $X = d$. Os valores de $f(X)$ nos pontos de mínimos locais são diferentes. O mesmo ocorre nos pontos de máximos locais. Claramente nenhum dos mínimos locais é um **mínimo absoluto** para $f(X)$, isto é, o menor valor que $f(X)$

assume — que pode não existir. Pelo gráfico, é possível que $f(X)$ assuma um máximo absoluto para $X = d$ — mas não podemos afirmar que isto ocorre. O próximo resultado é fundamental na busca por pontos de máximos e mínimos locais.

Teorema 3. *Assuma que $f(X)$ possui um máximo ou mínimo local para $X = a$. Se $f'(a)$ existe, então $f'(a) = 0$. Isto é, a reta tangente ao gráfico de $f(X)$ no ponto de abscissa $X = a$, quando existe, é horizontal.*

Estabeleceremos este resultado apenas no caso em que $f(X)$ possui um máximo local para $X = a$. O outro caso pode ser demonstrado de maneira similar. Por definição, existe um intervalo aberto I tal que a pertence a I e, para todo X em I, $f(X) \leq f(a)$. Se h for um número real tal que h está próximo de 0, então $a + h$ está contido em I porque I é um intervalo aberto em torno de a. Portanto, $f(a + h) - f(a) \leq 0$. Conseqüentemente

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \quad \text{quando } h > 0$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \quad \text{quando } h < 0$$

Logo

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

Portanto,

$$0 \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

Logo $f'(a) = 0$.

Diremos que $X = a$ é um **ponto crítico** para $f(X)$ quando $f'(a) = 0$. Pelo resultado anterior, os pontos críticos de $f(X)$ são candidatos a serem pontos de máximos ou mínimos locais. Pode ocorrer que um ponto crítico não seja de máximo ou mínimo local como, por exemplo, $X = 0$ para $f(X) = X^3$.

3. Encontrando máximos e mínimos absolutos

Suponha que $f(X)$ é uma função contínua para todo X pertencente ao intervalo fechado I. Pelo primeiro item do Teorema 2, existem m e M pertencentes ao intervalo I tais que

$$f(m) \leq f(X) \leq f(M)$$

para todo X pertencente ao intervalo I. Isto é, no intervalo I, $f(X)$ assume um máximo absoluto para $X = M$ e um mínimo absoluto para $X = m$. Como achar m e M? Responderemos isto nesta seção.

Se M está no interior do intervalo I, então $X = M$ é um máximo local para $f(X)$. Portanto, $f'(M) = 0$, caso esta derivada exista, pelo Teorema 3. Logo

- M é um dos extremos de I; ou
- $f'(M) = 0$; ou
- $f'(M)$ não existe.

De maneira similar, mostra-se que o mesmo tem de ocorrer para m. Conseqüentemente temos poucos valores a considerar, em geral, como candidatos para m e M. Decidimos para que valor o máximo absoluto ocorre calculando os valores de f para todos os possíveis candidatos. O maior valor será o de máximo absoluto ou seja $f(M)$. O menor será $f(m)$.

Exemplo 4. *Encontre o maior e o menor valor que a função* $f(X) = X^3 - 3X$ *assume no invervalo* $[-3, 2]$.

Esta função já foi considerada anteriormente. Seu gráfico pode ser encontrado no Exemplo 12 da Terceira Aula. Como $f(X)$ é contínua para todo X no intervalo $[-3, 2]$ podemos aplicar o método descrito arteriormente para encontrar os pontos de máximo ou mínimo absolutos. Primeiro procuramos os pontos críticos:

$$f'(X) = 3X^2 - 3 = 3(X^2 - 1) = 0$$

Logo $X = -1$ e $X = 1$ são os dois pontos críticos. Como $f'(X)$ existe para todo X em $[-3, 2]$, os candidatos a máximo ou mínimo absolutos são: -3 (extremo do intervalo), -1 (ponto crítico), 1 (ponto crítico) e 2 (extremo do intervalo). Considere a tabela com os valores de f nestes pontos:

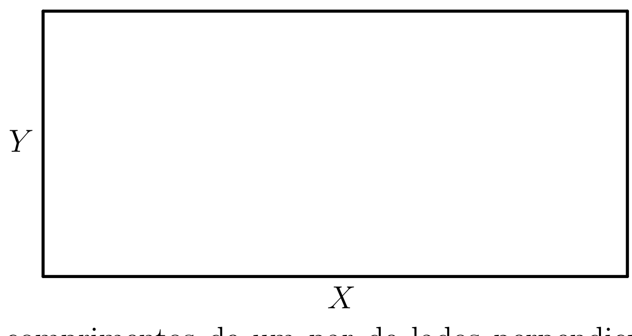
X	-3	-1	1	2
$f(X)$	-18	2	-2	2

Logo $X = -3$ é um ponto de mínimo absoluto e $X = -1$ e $X = 2$ são pontos de máximo absoluto.

Exercício 5. *Para cada uma das funções abaixo, determine seus pontos de mínimo e de máximo absolutos no intervalo indicado.*

(i) $a(X) = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + 3$ *no intervalo* $[-1, 5]$.
(ii) $b(X) = \left(X^2 + 3X + \frac{3}{2}\right) e^{1-2X}$ *no intervalo* $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$.
(iii) $c(X) = \operatorname{arctg}(X^2 + X + 1)$ *no intervalo* $[-1, 1]$.
(iv) $d(X) = \ln(3 + 2\cos X)$ *no intervalo* $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.
(v) $e(X) = |X^2 - 5X + 6|$ *no intervalo* $[0, 4]$.

Exemplo 6. *De todos os retângulos com perímetro 20, determine as dimensões daquele que possui área máxima.*



Sejam X e Y os comprimentos de um par de lados perpendiculares deste retângulo. Como o perímetro do retângulo é 20, temos que $2X + 2Y = 20$ e daí

(1) $$X + Y = 10$$

De todos estes retângulos, procuramos aquele que possui área máxima. Isto é, desejamos maximizar a área. A área deste retângulo é $A = XY$. Por (1), temos que $Y = 10 - X$. Logo a área deste retângulo pode ser escrita apenas como uma função de X, que será denotada por $A(X)$, com o objetivo de evidenciar o fato de que é uma função apenas de X. Portanto,

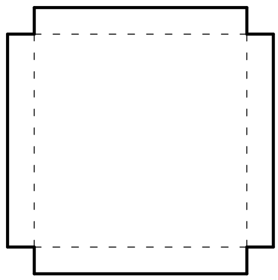
(2) $$A(X) = X(10 - X) = 10X - X^2$$

Passamos a ter como objetivo encontrar o máximo absoluto de $A(X)$. Como esta função é quadrática, pode-se resolver este problema utilizando apenas técnicas aprendidas no ensino fundamental. Contudo, usaremos a derivada para resolver este problema. Note que $A(X)$ é uma função contínua. Mais ainda, podemos tomar X apenas no intervalo $[0, 10]$ — nos extremos deste intervalo o retângulo é degenerado virando um segmento de comprimento 10. Note que

$$A'(X) = 10 - 2X = 2(5 - X)$$

O único ponto crítico de $A(X)$ é $X = 5$. Como $A'(X)$ existe para todo X em $[0, 10]$, os candidatos a máximo absoluto são: $X = 0, X = 5$ e $X = 10$. Como $A(0) = A(10) = 0$ e $A(5) = 25$, temos que $X = 5$ é um ponto de máximo absoluto. Por (1), $Y = 5$ quando $X = 5$. Logo o retângulo que maximiza a área é o quadrado de lado 5.

Exemplo 7. *Em cada uma das quatro extremidades de uma folha de papelão quadrada com lado 18, corta-se um pequeno quadrado — todos congruentes entre si. Dobrando-se o que sobrou do papelão ao longo das linhas pontilhadas, que são indicadas na figura, obtem-se uma caixa sem tampa. Determine o comprimento do lado destes quadrados cortados de forma que a caixa obtida tenha volume máximo.*



Se L é o comprimento de qualquer um dos quadrados que foram cortados, então a caixa será um paralelepípedo retângulo cujas dimensões são $18 - 2L, 18 - 2L$ e L. Portanto, o volume deste sólido, que será denotado por $V(L)$ para enfatizar a dependência de L, é o seguinte

$$V(L) = (18 - 2L)(18 - 2L)L = 4(9 - L)(9 - L)L = 4(L^3 - 18L^2 + 81L)$$

Note que $0 \leq L \leq 9$ — nos dois extremos deste intervalo para L, a caixa fica degenerada e possui volume 0. Logo, neste intervalo, $V(L)$ assume um máximo absoluto que terá de ser interior ao intervalo, pois $V(0) = V(9) = 0$. Como

$$V'(L) = 4(3L^2 - 36L + 81) = 12(L^2 - 12L + 27) = 12(L - 3)(L - 9)$$

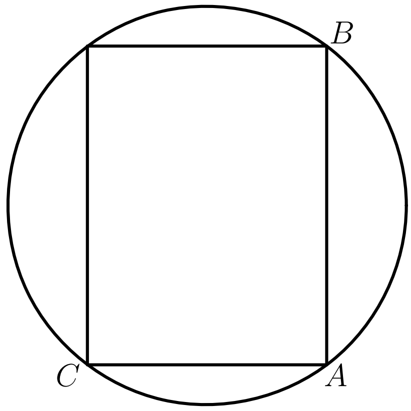
existe para todo valor de L, o máximo absoluto de $V(L)$ tem de ocorrer em um ponto crítico. Se $V'(L) = 0$, então $L = 3$ ou $L = 9$. O máximo absoluto ocorre para $L = 3$.

Exemplo 8. *De todos os cilindros circulares retos inscritos em uma esfera de raio R, determine as dimensões daquele que possui área máxima.*

Na figura seguinte respresentamos a interseção de um plano que contém o eixo do cilindro inscrito com a esfera e o cilindro. Note que ABC é um triângulo retângulo tendo ângulo reto no vértice A — os pontos A, B e C pertencem a intereseção da esfera com o cilindro. Caso a altura do cone seja denotada por H e o diâmetro da base do cone seja denotado por D, os catetos do triângulo ABC medem $\overline{CA} = D$ e $\overline{AB} = H$ e a hipotenusa mede $\overline{BC} = 2R$. Logo D e H estão relacionados através da expressão

(3) $$H^2 + D^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

Desta relação podemos obter D como função de H apenas ou H como função de D apenas, pois R é uma constante.



A área lateral A do cilindro é dada por

(4) $$A = \pi\left(DH + \frac{D^2}{2}\right)$$

Tirando o valor de H como função de D em (3), temos que

$$H = \sqrt{4R^2 - D^2}$$

Substituindo este valor em (4) obtemos a área do cilindro dependendo apenas de D:

$$A(D) = \pi\left(D\sqrt{4R^2 - D^2} + \frac{D^2}{2}\right)$$

(Passamos a denotar esta área por $A(D)$ para evidenciar o fato de que a área é uma função apenas da variável D — lembre-se que R é uma constante.) Note que $0 \leq D \leq 2R$ — nos dois extremos o cilindro é degenerado: é um segmento de comprimento $2R$, no primeiro, e um disco de raio R, no segundo. Observe que

$$A'(D) = \pi\left(\sqrt{4R^2 - D^2} - \frac{D^2}{\sqrt{4R^2 - D^2}} + D\right) = \frac{\pi(4R^2 - 2D^2 + D\sqrt{4R^2 - D^2})}{\sqrt{4R^2 - D^2}}$$

Como $A'(D)$ existe para todo ponto no interior do intervalo, o máximo absoluto de $A(D)$ ocorre em um extremo do intervalo ou em um ponto crítico que pode ser encontrado resolvendo a equação $A'(D) = 0$:

$$\frac{\pi(4R^2 - 2D^2 + D\sqrt{4R^2 - D^2})}{\sqrt{4R^2 - D^2}} = 0$$

Logo $4R^2 - 2D^2 + D\sqrt{4R^2 - D^2} = 0$. Esta identidade pode ser reescrita como

(5) $$4R^2 - 2D^2 = -D\sqrt{4R^2 - D^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros desta equação, obtemos que

$$16R^4 - 16R^2D^2 + 4D^4 = D^2(4R^2 - D^2)$$

Esta igualdade pode ser reescrita como

(6) $$5D^4 - 20R^2D^2 + 16R^4 = 0$$

que é uma equação biquadrática em D. As soluções de (6) são

$$D = \pm R\sqrt{\frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{5}} \tag{7}$$

(As soluções da equação (6) são soluções da equação (5) ou da equação

$$4R^2 - 2D^2 = D\sqrt{4R^2 - D^2} \tag{8}$$

Não será necessário decidir quais das soluções de (6) são também soluções de (5) porque ao calcularmos o valor de $A(D)$ em pontos extras, que não são candidatos a máximo absoluto, obtemos menores valores e estes pontos serão descartados.) Temos que

$$A\left(R\sqrt{\frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{5}}\right) = \pi R^2\left(\frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{5 \pm \sqrt{5}}{5}\right)$$

Como $A(0) = 0$ e $A(2R) = 2\pi R^2$ são menores que

$$A\left(R\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}}\right) = \pi R^2(1 + \sqrt{5})$$

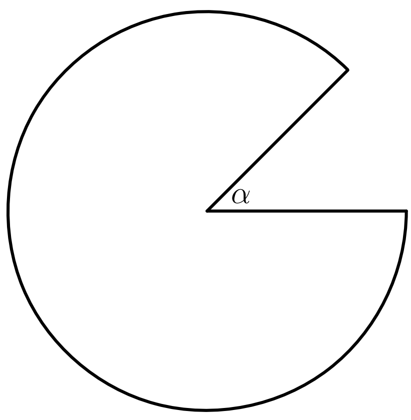
temos que o máximo absoluto ocorre quando

$$D = R\sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{5}} \quad \text{e} \quad H = R\sqrt{\frac{10 - 2\sqrt{5}}{5}}$$

Exercício 9. *Encontre números a e b cuja soma é igual a 36 e possuem produto máximo.*

Exercício 10. *De todos os retângulos inscritos em uma circunferência de raio 5, determine as dimensões daquele que possui área máxima.*

Exercício 11. *De uma folha de alumínio circular de raio 10, deseja-se construir um funil na forma de cone circular reto cuja planificação é obtida desta folha cortando-se um setor circular com ângulo α, como ilustrado na figura seguinte. Determine o valor de α de forma que este funil tenha volume máximo.*



Exercício 12. *De todos os cilindros inscritos em um cone circular reto tendo altura H e raio da base R, determine as dimensões daquele que possui volume máximo.*

4. Respostas dos exercícios

5. (i) $a(5) = 228$ é o máximo absoluto; $a(0) = a(2) = 3$ é o mínimo absoluto (ii) $b(-3) = \frac{3}{2}e^7$ é o máximo absoluto; $b(-2) = -\frac{e^5}{2}$ é o mínimo absoluto (iii) $c(1) = \operatorname{arctg} 3$ é o máximo absoluto; $c\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right)$ é o mínimo absoluto (iv) $d(0) = \ln 5$ é o máximo absoluto; $d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln 3$ é o mínimo absoluto (v) $e(0) = 6$ é o máximo absoluto; $e(2) = e(3) = 0$ é o mínimo absoluto **9.** $a = b = 18$ **10.** Um quadrado de lado $5\sqrt{2}$ **11.** $\alpha = \frac{17}{10}\pi$ **12.** O raio da base é $\frac{2R}{3}$ e a altura é $\frac{H}{3}$

Conteúdo da décima aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos