CÁLCULO L1 — NOTAS DA DÉCIMA NONA AULA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

Resumo. Nesta aula, desenvolveremos a técnica conhecida por integração por partes.

1. Integração por partes

A técnica vista na aula anterior, que é chamada de mudança de variáveis, é empregada para calcular a integral de uma função que, em sua essência, é igual a derivada, obtida através da regra da cadeia, de uma outra função. Já o método desenvolvido agora pode ser utilizado para lidar com a mesma situação quando a regra da cadeia é trocada pela regra do produto.

Para funções $f(X)$ e $g(X)$, seja $r(X) = f(X)g(X)$. A regra do produto afirma que

$$r'(X) = f'(X)g(X) + f(X)g'(X)$$

Integrando esta identidade, com relação a variável X, chegamos a

$$\int r'(X)dX = \int [f'(X)g(X) + f(X)g'(X)]dX$$

Como a integral da soma é a soma das integrais, temos que

$$\int r'(X)dX = \int f'(X)g(X)dX + \int f(X)g'(X)dX$$

Portanto,

$$r(X) = \int f'(X)g(X)dX + \int f(X)g'(X)dX$$

porque $r(X)$ é uma primitiva para $r'(X)$. Esta igualdade pode ser reescrita como

$$\int f(X)g'(X)dX = r(X) - \int f'(X)g(X)dX$$

Substituindo a expressão de $r(X)$ na identidade acima, obtemos que

$$\int f(X)g'(X)dX = f(X)g(X) - \int f'(X)g(X)dX \tag{1}$$

A igualdade (1) permite transformar o cálculo da integral de $f'(X)g(X)$ no cálculo da integral de $f(X)g'(X)$ que pode ser mais simples. Esta técnica é conhecida como **integração por partes**. Iremos aplicar este método para encontrar a integral de várias funções.

Exemplo 1. *Calcule a seguinte integral*

$$\int X \cos X dX$$

Estas notas foram escritas pelo professor da disciplina, Manoel Lemos.

Vamos tomar $f(X) = X$ e $g'(X) = \cos X$. Portanto, $f'(X) = 1$ e $g(X) = \operatorname{sen} X$. Por (1),

$$\int X \cos X = X \operatorname{sen} X - \int \operatorname{sen} X dX = X \operatorname{sen} X + \cos X + C$$

Exercício 2. *Calcule as seguintes integrais*

(i)

$$\int X \operatorname{sen} X dX$$

(ii)

$$\int X e^X dX$$

(iii)

$$\int X^2 \operatorname{sen} X dX$$

(iv)

$$\int (X^2 - 3X + 5) e^X dX$$

(v)

$$\int e^X \cos X dX$$

Em cada um dos três últimos itens do exercício anterior será necessário aplicar duas vezes a técnica de integração por partes para calcular a integral proposta. Para algumas funções, aplicando-se o método de integração por partes, é possível obter uma recorrência que permite o cálculo de sua integral. Vamos fazer um exemplo. Considere a seguinte integral, que depende de um natural n,

$$I_n = \int X^n e^X dX \tag{2}$$

Tomando $f(X) = X^n$ e $g'(X) = e^X$, temos que $f'(X) = nX^{n-1}$ e $g(X) = e^X$. Portanto, por (1),

$$\int X^n e^X dX = X^n e^X - \int n X^{n-1} e^X dX$$

Como a integração comuta com a multiplicação por um escalar, temos que

$$\int X^n e^X dX = X^n e^X - n \int X^{n-1} e^X dX$$

Esta identidade pode ser reescrita como

$$I_n = X^n e^X - n I_{n-1} \tag{3}$$

que é a recorrência procurada. O valor inicial da recorrência, quando $n = 0$, pode ser encontrado facilmente porque

$$I_0 = \int e^X dX = e^X + C$$

A partir desta integral, temos todas as outras. Faremos o computo para alguns valores de n:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= Xe^X - I_0 = (X-1)e^X + C \\
I_2 &= X^2e^X - 2I_1 = X^2e^X - 2(X-1)e^X + C = (X^2 - 2X + 2)e^X + C \\
I_3 &= X^3e^X - 3I_2 = (X^3 - 3X^2 + 6X - 6)e^X + C \\
I_4 &= X^4e^X - 4I_3 = (X^4 - 4X^3 + 12X^2 - 24X + 24)e^X + C \\
I_5 &= X^5e^X - 5I_4 = (X^5 - 5X^4 + 20X^3 - 60X^2 + 120X - 120)e^X + C
\end{aligned}
$$

Poderíamos continuar indefinidamente.

Exercício 3. *Para um natural n, considere as seguintes integrais:*

$$I_n = \int X^n \operatorname{sen} X dX \qquad e \qquad J_n = \int X^n \cos X dX$$

Decida sobre a veracidade de cada uma das recorrências dadas a seguir:

(i) *Quando* $n \geq 1$, $I_n = -X^n \cos X + nJ_{n-1}$
(ii) *Quando* $n \geq 1$, $J_n = X^n \operatorname{sen} X - nI_{n-1}$
(iii) *Quando* $n \geq 2$, $I_n = -X^n \cos X + nX^{n-1} \operatorname{sen} X - n(n-1)I_{n-2}$
(iv) *Quando* $n \geq 2$, $J_n = X^n \operatorname{sen} X + nX^{n-1} \cos X - n(n-1)J_{n-2}$

Esta técnica também serve para calcular integrais de funções que aparentemente não foram obtidas através da regra do produto. Por exemplo,

Exemplo 4. *Calcule a seguinte integral*

$$\int \ln X dX$$

Se $f(X) = \ln X$ e $g'(X) = 1$, então $f'(X) = \frac{1}{X}$ e $g(X) = X$. Por (1),

$$\int \ln X dX = X \ln X - \int dX = X \ln X - X + C$$

Exercício 5. *Calcule as seguintes integrais*

(i)

$$\int \ln^2 X dX$$

(ii)

$$\int X \ln X dX$$

(iii)

$$\int \operatorname{arctg} X dX$$

(iv)

$$\int (3 - 2X) \operatorname{arctg} X dX$$

(v)

$$\int \frac{dX}{(X^2+1)^2}$$

2. Respostas dos exercícios

2. (i) $-X\cos X + \operatorname{sen} X + C$ (ii) $Xe^X - e^X + C$ (iii) $-X^2\cos X + 2X\operatorname{sen} X + 2\cos X + C$ (iv) $(X^2 - 5X + 10)e^X + C$ (v) $\frac{e^X(\cos X + \operatorname{sen} X)}{2} + C$ **3.** (i) V (ii) V (iii) V (iv) V **5.** (i) $X\ln^2 X - 2X\ln X + 2X + C$ (ii) $\frac{X^2\ln X}{2} - \frac{X^2}{4} + C$ (iii) $X\operatorname{arctg} X - \frac{\ln(X^2+1)}{2} + C$ (iv) $(-X^2 + 3X - 1)\operatorname{arctg} X + X - \frac{3\ln(X^2+1)}{2} + C$ (v) $\frac{X}{2(X^2+1)} + \frac{\operatorname{arctg} X}{2} + C$

Conteúdo da décima nona aula da disciplina Cálculo L1, oferecida para os cursos de licenciatura em Física, Matemática e Química e o bacharelado em Química Idustrial, no segundo semestre de 2008 na Universidade Federal de Pernambuco, tendo como professor Manoel Lemos